

УДК 517.926.4

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ УСРЕДНЕННЫХ СИСТЕМ

© О.И. Авдеева

Ключевые слова: системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами; усредненные системы; мультипликаторы.

Рассматривается одно из свойств усредненных систем.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [1, глава 2]:

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^n a_{jk}(t)x_k, \quad j = 1 \dots n; \quad \dot{x} = A(t)x, \quad (1)$$

где $a_{jk}(t)$ — вещественные измеримые ω -периодические функции, суммируемые на отрезке $[0, \omega]$, причем матрица $A(t) = a_{jk}(t)$ внедиагонально неотрицательна при каждом t , то есть

$$a_{jk}(t) \geq 0, \quad j \neq k. \quad (2)$$

Матрицант системы (1) обозначим $U(t)$. Согласно (2), $U(t) \geq 0$ при $t \geq 0$ [2]. Рассмотрим матрицу монодромии $U(\omega)$ и ее собственные значения $\rho_1, \dots, \rho_n$ (мультипликаторы системы (1)). Тогда [3, с. 33]

$$\det U(\omega) = \rho_1 \cdots \rho_n > 0. \quad (3)$$

Системе (1) с периодическими коэффициентами поставим в соответствие усредненную систему:

$$\dot{z}_j = \sum_{k=1}^n c_{jk}z_k, \quad j = 1 \dots n; \quad \dot{z} = Cz, \quad (4)$$

где

$$c_{jk} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega a_{jk}(t)dt, \quad C = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega A(t)dt.$$

Согласно (2), имеем

$$c_{jk} \geq 0, \quad j \neq k. \quad (5)$$

Матрицант системы (4) обозначим $V(t)$; как известно, $V(t) = \exp(tC)$. В силу (5) $V(t) \geq 0$ при $t \geq 0$ [2]. Рассмотрим матрицу монодромии $V(\omega)$ и ее собственные значения $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ (мультипликаторы (4)). Тогда [3, с. 33]

$$\det V(\omega) = \sigma_1 \cdots \sigma_n. \quad (6)$$

Т е о р е м а 1. *Имеет место равенство*

$$\rho_1 \cdots \rho_n = \sigma_1 \cdots \sigma_n. \quad (7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дважды используя формулу Лиувилля–Остроградского–Якоби [4, с. 216], получим

$$\det U(\omega) = e^{\int_0^\omega \text{tr} A(t)dt} = e^{\int_0^\omega \sum_{j=1}^n a_{jj}(t)dt} =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\omega \sum_{j=1}^n \frac{1}{\omega} \int_0^\omega a_{jj}(t) dt} = e^{\omega \sum_{j=1}^n c_{jj}} = \\
&= e^{\omega \operatorname{tr} C} = e^{\int_0^\omega \operatorname{tr} C dt} = \det V(\omega).
\end{aligned}$$

Используя равенства (3) и (6), получаем (7). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. С. 720.
2. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965. С. 276.
3. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах. М.: Мир, 1966. С. 232.
4. Боровских А.В., Перов А.И. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004. С. 540.

Avdeeva O.I. ON ONE PROPERTY OF THE AVERAGED SYSTEMS

The article deals with one property of the averaged systems.

Key words: systems of linear ordinary differential equations with variable coefficients; averaged systems; multipliers.

УДК 519.676

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПУАССОНОВСКИХ ДЕЛЬТА-ИМПУЛЬСОВ В ЗАДАЧАХ РАДИОТЕХНИКИ

© Т.А. Аверина

Ключевые слова: задача анализа; импульсные воздействия; пуассоновский поток; пуассоновский процесс; статистический метод; стохастическая система; уравнение Колмогорова–Феллера.

В статье рассматриваются стохастические системы при импульсных воздействиях, образующих пуассоновский поток и приводящих к разрывам траекторий системы. Построен алгоритм статистического моделирования решения стохастических дифференциальных уравнений с пуассоновской составляющей.

Задача Коши для стохастических дифференциальных уравнений с пуассоновской составляющей формулируется следующим образом [1]: найти m -мерный случайный процесс $y(t)$, имеющий стохастический дифференциал

$$dy(t) = f(t, y(t))dt + \sum_{j=1}^s \sigma_{.j}(t, y(t))dw_j(t) + \int_{\Theta} c(t, y(t^-), \theta) \nu(d\theta \times dt), \quad y(0) = y_0, \quad (1)$$

где $w_j(t)$ – независимые стандартные винеровские процессы, образующие процесс $w(t)$; $\Theta \subset R^m$; $f(t, y): [0, T] \times R^m \rightarrow R^m$ и $c(t, y, \theta): [0, T] \times R^m \times \Theta \rightarrow R^m$ – m -мерные вектор-функции; $\sigma(t, y): [0, T] \times R^m \rightarrow R^{m \times s}$ – матричная функция $m \times s$; $\sigma_{.j}(t, y)$ – j -й столбец матрицы $\sigma(t, y)$; $y_0 \in R^m$ – случайный вектор начальных значений, $y(t^-)$ – решение в точке t слева. Пуассоновская мера ν на $\Theta \times [0, T]$ задана неотрицательной функцией $\lambda(\theta, t): \Theta \times [0, T] \rightarrow R_+$ и для всякого $B \subset \Theta$ процесс

$$\nu_t(B) = \nu(B \times [0, t])$$